1.2 Inele și corpuri
1.2.1 Inele
a) Noțiuni teoretice și exemple

1) Definiția inelului

Definiție. O mulțime nevidă **A** luată împreună cu două legi de compoziție una notată aditiv „+" și alta notată multiplicativ „·"
se numește **inel** dacă:

a) $(\mathbf{A},+)$ este **grup abelian**;

b) $(\mathbf{A},\cdot)$ este **monoid**;

c) înmulțirea este **distributivă** față de adunare, adică:

$x(y+z)=xy+xz, (y+z)x=yx+zx \ (\forall)x,y,z\in \mathbf{A}$.

Dacă în plus legea de compoziție notată multiplicativ este comutativă, atunci inelul se numește comutativ.

Exemple. a) $(\mathbf{Z},+,\cdot)$, adică mulțimea numerelor întregi împreună cu adunarea și înmulțirea determină o structură de inel. Elementul neutru față de adunare este 0, elementul neutru față de înmulțire este 1, orice $x\in\mathbf{Z}$ are ca opus pe $-x$.

b) $(\mathbf{R},+,\cdot)$, adică mulțimea numerelor reale împreună cu adunarea și înmulțirea determină o structură de inel. Elementul neutru față de adunare este 0, elementul neutru față de înmulțire este 1, orice $x\in\mathbf{R}$ are ca opus pe $-x$.

c) $(\mathbf{M_n}(\mathbf{R}),+,\cdot), n\geq 2$, adică mulțimea matricelor de n linii și n coloane cu coeficienți în **R** determină împreună cu adunarea și înmulțirea un inel necomutativ, având elementul neutru față de adunare matricea 0_n și elementul neutru față de înmulțire matricea unitate I_n.

d) $(\mathbf{Z_n},+,\cdot)$, adică mulțimea claselor de resturi modulo n, împreună cu adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo n determină o structură de inel. Elementul neutru față de adunare este $\hat{0}$, elementul neutru față de înmulțire este $\hat{1}$.

Definiție. Fie $(\mathbf{A},+,\cdot)$ un inel și $a\in\mathbf{A}, a\neq 0$. Spunem că a este divizor al lui 0 la stânga (respectiv la dreapta) dacă există $b\in\mathbf{A}, b\neq$ $\neq 0$, astfel încât $ab=0$ (respectiv $ba=0$).

Un element $a\in\mathbf{A}$, care este atât divizor la stânga cât și la dreapta al lui 0 se numește divizor al lui 0.

Exemple. Inelul $(\mathbf{Z_6}, +,\cdot)$ are divizori ai lui 0 deoarece $\hat{2} \neq \hat{0}$ $\hat{3} \neq \hat{0}$ și $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{0}$.

Definiție. Spunem că inelul $(\mathbf{A}, +,\cdot)$ este fără divizori ai lui 0 dacă $(\forall) x, y \in \mathbf{A}, x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$.

Exemplu. Inelul $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ nu are divizori ai lui 0 deoarece $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$.

2) Reguli de calcul într-un inel

1) Într-un inel $(\mathbf{A}, +,\cdot)$ cu cel puțin două elemente avem: $1 \neq 0$.
2) Pentru orice $x \in \mathbf{A}$, avem: $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.
3) Pentru orice $x, y \in \mathbf{A}$, avem:
$(-x)(-y) = xy$ și
$(-x)y = x(-y) = -xy$.
4) Pentru orice $x, y, z \in \mathbf{A}$ avem:
$x(y - z) = xy - xz$ și $(y - z)x = yx - zx$.
5) Într-un inel $(\mathbf{A}, +,\cdot)$ fără divizori ai lui 0, dacă $x \neq 0$, atunci:
$xy = xz \Rightarrow y = z$ și $yx = zx \Rightarrow y = z$.

b) Probleme rezolvate

1. Arătați că $(\mathbf{Z}, *, \mathrm{o})$, unde $x * y = x + y - 3$; $x\mathrm{o}y = xy - 3x - -3y + 12$ determină o structură algebrică de inel comutativ.

Soluție. a) Arătăm că $(\mathbf{Z}, *)$ este grup abelian.
$x * y = x + y - 3 = y + x - 3 = y * x$ $(\forall) x, y \in \mathbf{Z}$, deci legea $*$ este comutativă.
$(x * y) * z = (x + y - 3) * z = x + y - 3 + z - 3 = x + y + z - 6$;
$x * (y * z) = x * (y + z - 3) = x + y + z - 3 - 3 = x + y + z - 6$.
Atunci $(x * y) * z = x * (y * z) (\forall) x, y, z \in \mathbf{Z}$ și deci $*$ este asociativă.
Deoarece $*$ este comutativă, determinăm elementul neutru e din egalitatea: $x * e = x \Leftrightarrow x + e - 3 = x \Leftrightarrow e = 3$.
Deoarece $*$ este comutativă, pentru $x \in \mathbf{Z}$ determinăm elementul simetric x' din egalitatea: $x * x' = e \Leftrightarrow x + x' - 3 = 3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x' = -x + 6 \in \mathbf{Z}$.

Deci $(\mathbf{Z}, *)$ este grup abelian.

b) Arătăm că $(\mathbf{Z}, \mathrm{o})$ este monoid.
$(x\mathrm{o}y)\mathrm{o}z = (xy - 3x - 3y + 12)\mathrm{o}z = (xy - 3x - 3y + 12)z -$

$-3(xy-3x-3y+12)-3z+12=\cdots=xyz-3xy-3yz-$
$-3zx+9x+9y+9z-24.$
$x\text{o}(y\text{o}z)=x\text{o}(yz-3y-3z+12)=x(yz-3y-3z+12)-$
$-3(yz-3y-3z+12)-3x+12=\cdots=xyz-3xy-3yz-$
$-3zx+9x+9y+9z-24.$
Deci o este asociativă.
Deoarece o este comutativă (se arată cu ușurință), determinăm elemental neutru e, astfel încât $x\text{o}e=x(\forall)x\in\mathbf{Z}$.
$x\text{o}e=x\Leftrightarrow xe-3x-3e+12=x\Leftrightarrow e(x-3)=4(x-3)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e=4.$
c) Deoarece o este comutativă, arătăm că o este **distributivă** față de $*$, adică:
$x\text{o}(y*z)=x\text{o}y*x\text{o}z(\forall)x,y,z\in\mathbf{Z}.$
$x\text{o}(y*z)=x\text{o}(y+z-3)=x(y+z-3)-3x-3(y+z-3)+$
$+12=xy+xz-6x-3y-3z+21.$
$x\text{o}y*x\text{o}z=(xy-3x-3y+12)*(xz-3x-3z+12)=$
$=xy-3x-3y+12+xz-3x-3z+12-3=$
$=xy+xz-6x-3y-3z+21.$
Deci legea o este **distributivă** față de legea $*$

2. Fie mulțimea A $=\left\{\begin{pmatrix}a&0&a\\0&0&0\\a&0&a\end{pmatrix}\middle|a\in\mathbf{R}\right\}$. Arătați că mulțimea A are o structură algebrică de inel față de adunarea și înmulțirea matricelor. Studiați existența divizorilor lui zero.

Soluție. a) Arătăm că $(\mathrm{A},+)$ este grup abelian.

$$\begin{pmatrix}a&0&a\\0&0&0\\a&0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b&0&b\\0&0&0\\b&0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&0&a+b\\0&0&0\\a+b&0&a+b\end{pmatrix} \text{ și}$$
$$\begin{pmatrix}b&0&b\\0&0&0\\b&0&b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&0&a\\0&0&0\\a&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&0&a+b\\0&0&0\\a+b&0&a+b\end{pmatrix},$$
de unde rezultă că adunarea matricelor este comutativă.
$$\begin{pmatrix}a&0&a\\0&0&0\\a&0&a\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}b&0&b\\0&0&0\\b&0&b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c&0&c\\0&0&0\\c&0&c\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}a&0&a\\0&0&0\\a&0&a\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} b+c & 0 & b+c \\ 0 & 0 & 0 \\ b+c & 0 & b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & a+b+c \\ 0 & 0 & 0 \\ a+b+c & 0 & a+b+c \end{pmatrix};$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 \\ a+b & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & a+b+c \\ 0 & 0 & 0 \\ a+b+c & 0 & a+b+c \end{pmatrix},$$ de unde rezultă că adunarea matricelor este asociativă.

Elementul neutru în raport cu adunarea este matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Simetrica matricei $\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ este matricea $\begin{pmatrix} -a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix}$ și

$\begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix}$, de unde rezultă că înmulțirea matricelor este comutativă.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 2bc & 0 & 2bc \\ 0 & 0 & 0 \\ 2bc & 0 & 2bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4abc & 0 & 4abc \\ 0 & 0 & 0 \\ 4abc & 0 & 4abc \end{pmatrix}.$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4abc & 0 & 4abc \\ 0 & 0 & 0 \\ 4abc & 0 & 4abc \end{pmatrix},$$ de unde rezultă că înmulțirea matricelor este asociativă.

Deoarece înmulțirea este comutativă, determinăm elementul

neutru $\begin{pmatrix} e & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & e \end{pmatrix}$ astfel încât să avem: $\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & e \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2ae & 0 & 2ae \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ae & 0 & 2ae \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow 2ae = a \Rightarrow$
$\Rightarrow e = \frac{1}{2}$. Elementul neutru este deci $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Se demonstrează cu ușurință că înmulțirea este distributivă față de adunare, adică:
$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} (\forall) a, b, c \in \mathbf{R}$.

Inelul nu are divizori ai lui zero deoarece:
$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a \neq 0$; $\begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow b \neq 0$. Atunci: $ab \neq 0$ și $\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} ab & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ ab & 0 & ab \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, deoarece $ab \neq 0$.

3. Arătați că în orice inel comutativ $(A, +, \cdot)$ sunt adevărate egalitățile:
a) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
b) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
c) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Soluție. Inelul fiind comutativ avem $ab = ba\ (\forall) a, b \in A$.
a) $(a - b)(a + b) = aa + ab - ba - bb = a^2 + ab -$
$-ab - b^2 = a^2 - b^2$.
b) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 =$

$a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
c) $(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c) = a^2 + ab + ac +$
$+ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 = a^2 + ab + ac + ab + b^2 +$
$+bc + ac + bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

4. Demonstrați că în inelul $\mathbf{Z}_2$ sunt adevărate egalitățile:
a) $(a + b)^2 = a + b$;
b) $(a + b)^3 = a + b$;
c) $(a + b)^4 = a + b$.

Soluție. a) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb =$
$= a^2 + ab + ba + b^2$.

Din tabla înmulțirii și tabla adunării avem: $a^2 = a, b^2 = b$ și $ab + ba = 0$. Atunci rezultă $(a + b)^2 = a + b$.
b) $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a + b)(a + b) = (a + b)^2 =$
$= a + b$.
c) $(a + b)^4 = (a + b)^3(a + b) = (a + b)(a + b) = (a + b)^2 =$
$= a + b$.

5. Demonstrați că în inelul $\mathbf{Z}_3$ sunt adevărate egalitățile:
a) $(a + b)^2 = a^2 - ab + b^2$;
b) $(a + b)^3 = a + b$.

Soluție. a) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb =$
$= a^2 + ab + ba + b^2$. Însă $ab + ba = ab + ab = ab + ab + ab -$
$-ab = 0 - ab = -ab$. Atunci $(a + b)^2 = a^2 - ab + b^2$.
b) $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 - ab + b^2)(a + b) =$
$= a^3 + a^2b - aba - abb + b^2a + b^3 = a^3 + b^3 = a + b$, deoarece înmulțirea în $\mathbf{Z}_3$ este comutativă ($a^2b - aba = a^2b - aab = 0$ și $-abb + b^2a = -bab + b^2a = -bba + b^2a = 0$) și $a^3 = a;\ b^3 =$
$= b$ ($\hat{0}^3 = \hat{0};\ \hat{1}^3 = \hat{1};\ \hat{2}^3 = \hat{2}$).

6. Rezolvați în $\mathbf{Z}_2$ ecuațiile:
a) $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$ b) $x^3 + x = \hat{0}$.

Soluție. $\mathbf{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}$. Vom verifica pe rând dacă $\hat{0}, \hat{1}$ sunt soluții.
a) $\hat{0}^2 + \hat{1} = \hat{0} + \hat{1} = \hat{1} \neq \hat{0}$, deci $\hat{0}$ nu este soluție a ecuației.
$\hat{1}^2 + \hat{1} = \hat{1} + \hat{1} = \hat{0}$, deci $\hat{1}$ este soluție a ecuației.
b) $\hat{0}^3 + \hat{0} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$, deci $\hat{0}$ este soluție a ecuației.

$\hat{1}^3 + \hat{1} = \hat{1} + \hat{1} = \hat{0}$, deci $\hat{1}$ este soluție a ecuației.

7. Rezolvați în $\mathbf{Z}_4$ ecuațiile:

a) $x^2 + x + \hat{2} = \hat{0}$ b) $x^3 + \hat{1} = \hat{0}$.

Soluție. $\mathbf{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$. Vom verifica pe rând dacă $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ sunt soluții.

a) $\hat{0}^2 + \hat{0} + \hat{2} = \hat{0} + \hat{2} = \hat{2} \neq \hat{0}$, deci $\hat{0}$ nu este soluție a ecuației.

$\hat{1}^2 + \hat{1} + \hat{2} = \hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$, deci $\hat{1}$ este soluție a ecuației.

$\hat{2}^2 + \hat{2} + \hat{2} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$, deci $\hat{2}$ este soluție a ecuației.

$\hat{3}^2 + \hat{3} + \hat{2} = \hat{1} + \hat{1} = \hat{2} \neq \hat{0}$, deci $\hat{3}$ nu este soluție a ecuației.

b) $\hat{0}^3 + \hat{1} = \hat{0} + \hat{1} = \hat{1} \neq \hat{0}$, deci $\hat{0}$ nu este soluție a ecuației.

$\hat{1}^3 + \hat{1} = \hat{1} + \hat{1} = \hat{2} \neq \hat{0}$, deci $\hat{1}$ nu este soluție a ecuației.

$\hat{2}^3 + \hat{1} = \hat{0} + \hat{1} = \hat{1} \neq \hat{0}$, deci $\hat{2}$ nu este soluție a ecuației.

$\hat{3}^3 + \hat{1} = \hat{3} + \hat{1} = \hat{0}$, deci $\hat{3}$ este soluție a ecuației.

8. Rezolvați în $\mathbf{Z}_4$ sistemul

a) $\begin{cases} x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{3}x + y = \hat{1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = \hat{0} \\ \hat{2}x + y = \hat{1} \end{cases}$.

Soluție. Tabla înmulțirii în $\mathbf{Z}_4$ este:

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

a) Se înmulțește a doua ecuație cu 2, se adună cu prima și se obține: $\hat{3}x + \hat{0} = \hat{1} + \hat{2} \Rightarrow \hat{3}x = \hat{3} \Rightarrow x = \hat{1}$. Înlocuind în a doua euație se obține $\hat{3} + y = \hat{1} \Rightarrow \hat{3} + \hat{1} + y = \hat{1} + \hat{1} \Rightarrow y = \hat{2}$.

b) Se înmulțește a doua ecuație cu $\hat{2}$ și se obține $\hat{2}y = \hat{2} \Rightarrow y = \hat{1}$ sau $y = \hat{3}$. Înlocuind în prima ecuație obținem:

pentru $y = \hat{1} \Rightarrow x + \hat{1} = \hat{0} \Rightarrow x = \hat{3}$.

pentru $y = \hat{3} \Rightarrow x + \hat{3} = \hat{0} \Rightarrow x = \hat{1}$.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Arătați că $(\mathbf{R},*,\text{o})$, unde $x*y = x+y+2; x\text{o}y = 2xy +$ $+4x+4y+6$ determină o structură algebrică de inel comutativ.

Elementul neutru în raport cu o este egal cu:

$$-\frac{5}{2} \qquad -\frac{3}{2} \qquad -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{3}{2}$$

2. Arătați că $(\mathbf{R},*,\text{o})$, unde $x*y = x+y-1; x\text{o}y = \frac{1}{2}xy -$ $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$ determină o structură algebrică de inel comutativ.

Elementul neutru în raport cu o este egal cu:

$$\mathbf{0} \qquad \mathbf{1} \qquad \mathbf{2} \qquad \mathbf{3} \qquad \mathbf{4}$$

3. Fiind dată mulțimea $\boldsymbol{A} = \{x + y\sqrt{5} | x, y \in \mathbf{Z}\}$, adunarea $+$ și înmulțirea $\cdot$ numerelor reale arătați că $(\mathbf{A},+,\cdot)$ determină o structură algebrică de inel.

Elementul neutru în raport cu înmulțirea este:

$$\mathbf{0} \qquad \mathbf{1} \qquad \mathbf{1+\sqrt{5}} \qquad \mathbf{1-\sqrt{5}} \qquad \mathbf{2}$$

4. Fiind dată mulțimea $\mathbf{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbf{Z} \right\}$, adunarea $+$ și înmulțirea $\cdot$ matricelor, arătați că $(\mathbf{A},+,\cdot)$ determină o structură algebrică de inel.

Elementul neutru în raport cu înmulțirea este:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

5. Fiind dat inelul comutativ $(\boldsymbol{A},+,\cdot)$ și $a, b \in \boldsymbol{A}$ expresia $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ este egală cu:

$$\boldsymbol{a-b} \qquad \boldsymbol{a+b} \qquad \boldsymbol{a^2-b^2} \qquad \boldsymbol{a^2+b^2} \qquad \boldsymbol{a^3-b^3}$$

6. Fiind dat inelul comutativ $(\boldsymbol{A},+,\cdot)$ și $a, b \in \boldsymbol{A}$ expresia $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ este egală cu:

$$\boldsymbol{a-b} \qquad \boldsymbol{a+b} \qquad \boldsymbol{(a+b)^2} \qquad \boldsymbol{(a+b)^3} \qquad \boldsymbol{(a-b)^3}$$

7. Fiind dat inelul $\mathbf{Z}_3$ și $a, b \in \mathbf{Z}_3$, calculați $a^3 + b^3$ și arătați că are valoarea egală cu:

$\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{a+b}$ $\boldsymbol{a^2+b^2}$ $\boldsymbol{a-b}$

8. Rezolvați în $\mathbf{Z}_2$ ecuația $x^3 + x^2 + x + \hat{1} = \hat{0}$. Soluțiile sunt:

$\hat{\mathbf{0}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{0}}$ **și** $\hat{\mathbf{1}}$

9. Rezolvați în $\mathbf{Z}_3$ ecuația $x^3 + x = \hat{0}$. Soluțiile sunt:

$\hat{\mathbf{0}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{2}}$ $\hat{\mathbf{0}}$ **și** $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{0}}$ **și** $\hat{\mathbf{2}}$

10. Rezolvați în $\mathbf{Z}_4$ ecuația $x^3 + x + \hat{2} = \hat{0}$. Soluțiile sunt:

$\hat{\mathbf{0}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{2}}$ $\hat{\mathbf{3}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ **,** $\hat{\mathbf{2}}$ **și** $\hat{\mathbf{3}}$

11. Rezolvați în $\mathbf{Z}_6$ ecuația $x^3 + x + \hat{2} = \hat{0}$. Soluțiile sunt:

$\hat{\mathbf{0}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{2}}$ $\hat{\mathbf{3}}$ $\hat{\mathbf{4}}$

12. Rezolvați în $\mathbf{Z}_4$ sistemul $\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2}x + y = \hat{0} \end{cases}$. Soluția lui este:

$\hat{\mathbf{0}}$ **și** $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{0}}$ **și** $\hat{\mathbf{2}}$ $\hat{\mathbf{2}}$ **și** $\hat{\mathbf{0}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ **și** $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ **și** $\hat{\mathbf{2}}$

13. Rezolvați în $\mathbf{Z}_4$ sistemul $\begin{cases} x + \hat{3}y = \hat{2} \\ \hat{2}x + y = \hat{3} \end{cases}$. Soluția lui este:

$\hat{\mathbf{0}}$ **și** $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{0}}$ **și** $\hat{\mathbf{2}}$ $\hat{\mathbf{2}}$ **și** $\hat{\mathbf{0}}$ $\hat{\mathbf{3}}$ **și** $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ **și** $\hat{\mathbf{3}}$

14. Rezolvați în $\mathbf{Z}_4$ sistemul $\begin{cases} x + y = \hat{3} \\ \hat{3}x + y = \hat{3} \end{cases}$. Ecuația are un număr de soluții egal cu:

0 **1** **2** **3** **4**

15. Rezolvați în $\mathbf{Z}_4$ sistemul $\begin{cases} x + y + z = \hat{2} \\ \hat{2}x + y + z = \hat{3} \\ x + \hat{2}y + z = \hat{0} \end{cases}$. Soluția lui este:

$\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{2}}; \hat{\mathbf{3}}$ $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}; \hat{\mathbf{0}}$ $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}; \hat{\mathbf{3}}$ $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{0}}; \hat{\mathbf{3}}$ $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}; \hat{\mathbf{0}}$

CUPRINS