## 1.2.2 Corpuri

### a) Noțiuni teotetice și exemple

**1) Definiția corpului**

Un inel $(\mathbf{K},+,\cdot)$ se numește corp dacă:

a) $1 \neq 0$;

b) $(\forall)x \in \mathbf{K}, x \neq 0$ este simetrizabil.

Dacă în plus legea de compoziție notată multiplicativ este comutativă, atunci corpul se numește comutativ.

**Exemple**. $(\mathbf{Q},+,\cdot)$, $(\mathbf{R},+,\cdot)$, $(\mathbf{C},+,\cdot)$ sunt corpuri comutative.

**Remarcă.** Corpurile nu au divizori ai lui 0.

**Teoremă.** Dacă *n* este număr prim, atunci $(\mathbf{Z_n},+,\cdot)$ este corp.

### b) Probleme rezolvate

**1.** Arătați că $(\mathbf{Q},*,\mathrm{o})$, unde $x * y = x + y + 2; x\mathrm{o}y = xy + 2x +$ $+2y + 2$ determină o structură algebrică de corp.

**Soluție**. a) Arătăm mai întâi că $(\mathbf{Q},*,\mathrm{o})$ este inel.

a) Arătăm că $(\mathbf{Q},*)$ este grup abelian.

$x * y = x + y + 2 = y + x + 2 = y * x\ (\forall)x, y \in \mathbf{Z}$, deci legea $*$ este comutativă.

$(x * y) * z = (x + y + 2) * z = x + y + 2 + z + 2 = x + y + z + 4;$
$x * (y * z) = x * (y + z + 2) = x + y + z + 2 + 2 = x + y + z + 4.$

Atunci $(x * y) * z = x * (y * z)(\forall)x, y, z \in \mathbf{Z}$ și deci $*$ este asociativă.

Deoarece $*$ este comutativă, determinăm elementul neutru $e$ din egalitatea: $x * e = x \Leftrightarrow x + e + 2 = x \Leftrightarrow e = -2$.

Deoarece $*$ este comutativă, pentru $x \in \mathbf{Z}$ determinăm elementul simetric $x'$ din egalitatea: $x * x' = e \Leftrightarrow x + x' + 2 = -2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x' = -x - 4 \in \mathbf{Z}$.

Deci $(\mathbf{Q},*)$ este grup abelian.

b) Arătăm că $(\mathbf{Z},\mathrm{o})$ este monoid.

$(x\mathrm{o}y)\mathrm{o}z = (xy + 2x + 2y + 2)\mathrm{o}z = (xy + 2x + 2y + 2)z +$
$+2(xy + 2x + 2y + 2) + 2z + 2 = \cdots = xyz + 2xy + 2yz +$
$+2zx + 4x + 4y + 4z + 6.$

$x\mathrm{o}(y\mathrm{o}z) = x\mathrm{o}(yz + 2y + 2z + 2) = x(yz + 2y + 2z + 2) +$
$+2(yz + 2y + 2z + 2) + 2x + 2 = \cdots = xyz + 2xy + 2yz +$

$+2zx+4x+4y+4z+6$.
Deci o este asociativă.
Deoarece o este comutativă ( se arată cu ușurință ), determinăm elementul neutru $E$, astfel încât $x\text{o}E=x(\forall)x\in\mathbf{Q}$.
$x\text{o}E=x\Leftrightarrow xE+2x+2E+2=x\Leftrightarrow E(x+2)=-x-2)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow E=-1$.
c) Deoarece o este comutativă, arătăm că o este **distributivă** față de $*$, adică:
$x\text{o}(y*z)=x\text{o}y*x\text{o}z(\forall)x,y,z\in\mathbf{Q}$.
$x\text{o}(y*z)=x\text{o}(y+z+2)=x(y+z+2)+2x+2(y+z+2)+$
$+2=xy+xz+4x+2y+2z+6$.
$x\text{o}y*x\text{o}z=(xy+2x+2y+2)*(xz+2x+2z+2)=$
$=xy+2x+2y+2+xz+2x+2z+2+2=$
$=xy+xz+4x+2y+2z+6$.

Deci legea o este **distributivă** față de legea $*$.

Evident $0=-2; 1=-1$ și evident $1\neq 0$.

Arătăm acum că $(\forall)x\in\mathbf{Q}, x\neq -2$ este inversabil, adică există $x'\in\mathbf{Q}$ astfel încât $x\text{o}x'=-1\Leftrightarrow xx'+2x+2x'+2=-1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x'(x+2)=-2x-3\Leftrightarrow x'=\frac{-2x-3}{x+2}$.

**2**. Fie mulțimea $\mathrm{K}=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \mid a\in\mathbf{Q}\right\}$. Arătați că mulțimea K are o structură algebrică de corp față de adunarea și înmulțirea matricelor.

**Soluție**. a) Arătăm cu ușurință că $(\mathrm{K},+)$ este grup abelian.
$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și
$\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, de unde rezultă că adunarea matricelor este comutativă.
$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b+c & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}==$
$=\begin{pmatrix}a+b+c & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;
$\left[\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=$

$= \begin{pmatrix} a+b+c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde rezultă că adunarea matricelor este asociativă.

Elementul neutru în raport cu adunarea este matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Simetrica matricei $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ este matricea $\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și

$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde rezultă că înmulțirea matricelor este comutativă.

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

de unde rezultă că înmulțirea matricelor este asociativă.

Deoarece înmulțirea este comutativă, determinăm elementul neutru $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ astfel încât să avem: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ae & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow ae = a \Rightarrow e = 1.$

Elementul neutru este deci $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Se demonstrează cu ușurință că înmulțirea este distributivă față de adunare, adică:

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(\forall) a, b, c \in \mathbf{Q}$.

Evident 0 = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și 1 = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și atunci evident $0 \neq 1$.

Demonstrăm acum că oricare ar fi $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ este inversabil, adică există $\begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ astfel încât $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} xx' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow xx' = 1 \Rightarrow x' = \frac{1}{x}$ și $\begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**3.** Se consideră $K = \{0, 1, a, b\}$ un corp cu 4 elemente.

Demonstrați relațiile:

a) $ab = ba = 1$
b) $a^2 = b$.

**Soluție**. Evident $a \neq 0, a \neq 1, a \neq b, b \neq 0, b \neq 1$.

a) Presupunem că $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ sau $b = 0$, fals.
Presupunem $ab = a \Rightarrow b = 1$, fals.
Presupunem $ab = b \Rightarrow a = 1$, fals.
Rezultă atunci că $ab = 1$.
b) Presupunem că $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$, fals.
Presupunem că $a^2 = 1 \Rightarrow a^2 b = b \Rightarrow aab = b \Rightarrow a = b$, fals.
Presupunem că $a^2 = a \Rightarrow a = 1$, fals.
Rezultă atunci că $a^2 = b$.

**4**. Rezolvați în $\mathbf{Z}_3$ ecuațiile:

a) $x^2 + \hat{2} = \hat{0}$ b) $x^3 + x + \hat{2} = \hat{0}$.

**Soluție**. $\mathbf{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$. Vom verifica pe rând dacă $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}$ sunt soluții.

a) $\hat{0}^2 + \hat{2} = \hat{0} + \hat{2} = \hat{2} \neq \hat{0}$, deci $\hat{0}$ nu este soluție a ecuației.
$\hat{1}^2 + \hat{2} = \hat{1} + \hat{2} = \hat{0}$, deci $\hat{1}$ este soluție a ecuației.
$\hat{2}^2 + \hat{2} = \hat{1} + \hat{2} = \hat{0}$, deci $\hat{2}$ este soluție a ecuației.
b) $\hat{0}^3 + \hat{0} + \hat{2} = \hat{0} + \hat{2} = \hat{2}$, deci $\hat{0}$ nu este soluție a ecuației.
$\hat{1}^3 + \hat{1} + \hat{2} = \hat{1} + \hat{0} = \hat{1}$, deci $\hat{1}$ nu este soluție a ecuației.
$\hat{2}^3 + \hat{2} + \hat{2} = \hat{2} + \hat{1} = \hat{0}$, deci $\hat{2}$ este soluție a ecuației.

**5**. Rezolvați în $\mathbf{Z}_5$ ecuațiile:

a) $x^2 + x + \hat{2} = \hat{0}$ b) $x^4 + x + \hat{1} = \hat{0}$.

**Soluție**. $\mathbf{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$. Vom verifica pe rând dacă $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$ sunt soluții.

a) $\hat{0}^2 + \hat{0} + \hat{2} = \hat{0} + \hat{2} = \hat{2} \neq \hat{0}$, deci $\hat{0}$ nu este soluție a ecuației.
$\hat{1}^2 + \hat{1} + \hat{2} = \hat{2} + \hat{2} = \hat{4}$, deci $\hat{1}$ nu este soluție a ecuației.
$\hat{2}^2 + \hat{2} + \hat{2} = \hat{4} + \hat{4} = \hat{3}$, deci $\hat{2}$ nu este soluție a ecuației.
$\hat{3}^2 + \hat{3} + \hat{2} = \hat{4} + \hat{0} = \hat{4} \neq \hat{0}$, deci $\hat{3}$ nu este soluție a ecuației.
$\hat{4}^2 + \hat{4} + \hat{2} = \hat{1} + \hat{1} = \hat{2} \neq \hat{0}$, deci $\hat{4}$ nu este soluție a ecuației.

Ecuația nu are soluții în $\mathbf{Z}_5$

b) Se procedează ca la a) și se obține soluția $\hat{3}$.

**6**. Rezolvați în $\mathbf{Z}_5$ sistemul

a) $\begin{cases} x+y=\hat{1} \\ \hat{2}x+\hat{4}y=\hat{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \hat{2}x+\hat{3}y=\hat{2} \\ x+y=\hat{3} \end{cases}$.

**Soluție**. Tabla înmulțirii în $\mathbf{Z}_5$ este:

| $\cdot$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ |
| $\hat{1}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{4}$ |
| $\hat{2}$ | $\hat{0}$ | $\hat{2}$ | $\hat{4}$ | $\hat{1}$ | $\hat{3}$ |
| $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{3}$ | $\hat{1}$ | $\hat{4}$ | $\hat{2}$ |
| $\hat{4}$ | $\hat{0}$ | $\hat{4}$ | $\hat{3}$ | $\hat{2}$ | $\hat{1}$ |

a) Se aduna prima ecuație cu a doua și se ține cont că $y+\hat{4}y=\hat{0}$ și atunci rezultă $\hat{3}x=\hat{3} \Rightarrow x=\hat{1}$. Înlocuind pe $x$ cu $\hat{1}$ în prima ecuație obținem $\hat{1}+y=\hat{1} \Rightarrow y=\hat{0}$.

b) Se înmulțește a doua ecuație cu $\hat{2}$ și se obține sistemul:

$$\begin{cases} \hat{2}x+\hat{3}y=\hat{2} \\ \hat{2}x+\hat{2}y=\hat{1} \end{cases}.$$

Adunăm membru cu membru cele două ecuații obținem:

$\hat{4}x=\hat{3} \Rightarrow x=\hat{2}$.

Înlocuind pe $x$ cu $\hat{2}$ în a doua ecuație obținem: $\hat{2}+y=\hat{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\hat{1}$.

## c) Probleme propuse spre rezolvare

**1.** Arătați că $(\mathbf{R}, *, \circ)$, unde $x * y = x + y - 4; x \circ y = xy - -4x - 4y + 20$ determină o structură algebrică de corp comutativ.

Elementul neutru în raport cu o este egal cu:

**1** **2** **3** **4** **5**

**2.** Arătați că $(\mathbf{R}, *, \circ)$, unde $x * y = x + y + 4; x \circ y = xy + +4x + 4y + 12$ determină o structură algebrică de ciorp comutativ.

Elementul simetric al lui $x \in \mathbf{R}, x \neq -4$ în raport cu o este egal cu:

$\frac{x}{x+4}$ $\frac{-x}{x+4}$ $\frac{-4x}{x+4}$ $\frac{-4x-15}{x+4}$ $\frac{x+3}{x+4}$

**3.** Fiind dată mulțimea $\boldsymbol{K} = \{x + y\sqrt{3} | x, y \in \mathbf{Q}\}$, adunarea + și înmulțirea · numerelor reale arătați că $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ determină o structură algebrică de corp comutativ.

Elementul neutru în raport cu înmulțirea este:

$\mathbf{0}$ $\mathbf{1}$ $\mathbf{1 + \sqrt{3}}$ $\mathbf{1 - \sqrt{3}}$ $\mathbf{2}$

**4.** Fiind dată mulțimea $\mathbf{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 4y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} | x, y \in \mathbf{Q} \right\}$, adunarea + și înmulțirea · a matricelor, arătați că $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ determină o structură algebrică de corp.

Elementul neutru în raport cu înmulțirea este:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**5.** Fiind dată mulțimea $\mathbf{K} = (0, +\infty)$ și legile de compoziţie: $x * y = xy; x \circ y = x^{\ln y}$ pe $\mathbf{K}$, arătați că $(\mathbf{K}, *, \circ)$ determină o structură algebrică de corp comutativ;

Elementul neutru în raport cu legea o este:

**0** **1** **2** **e** **3**

**6.** Se consideră $K = \{0, 1, a, b\}$ un corp cu 4 elemente.

Calculați $a^3$ și arătați că este egală cu:

**0** **1** ***a*** ***b***

**7.** Se consideră $K = \{0, 1, a, b\}$ un corp cu 4 elemente. Calculați $a^2 + a + 1$ și arătați că este egală cu:

$\mathbf{0}$ $\mathbf{1}$ $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{b}$

**8.** Rezolvați în $\mathbf{Z}_3$ ecuația $x^3 + x^2 + x + \hat{1} = \hat{0}$. Soluțiile sunt:

$\hat{\mathbf{0}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{0}}$ **și** $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{2}}$

**9.** Rezolvați în $\mathbf{Z}_5$ ecuația $x^3 + x = \hat{0}$. Soluțiile sunt:

$\hat{\mathbf{3}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{2}}$ $\hat{\mathbf{2}}$ **și** $\hat{\mathbf{3}}$ $\hat{\mathbf{4}}$

**10.** Rezolvați în $\mathbf{Z}_7$ ecuația $x^3 + x^2 + \hat{2} = \hat{0}$. Soluțiile sunt:

$\hat{\mathbf{0}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{2}}$ $\hat{\mathbf{3}}$ $\hat{\mathbf{4}}$

**11.** Rezolvați în $\mathbf{Z}_7$ ecuația $x^2 + x + \hat{1} = \hat{0}$. Soluțiile sunt:

$\hat{\mathbf{0}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{2}}$ **și** $\hat{\mathbf{4}}$ $\hat{\mathbf{3}}$ $\hat{\mathbf{4}}$

**12.** Rezolvați în $\mathbf{Z}_3$ sistemul $\begin{cases} x + \hat{2}y = \hat{2} \\ x + y = \hat{0} \end{cases}$. Soluția lui este:

$\hat{\mathbf{0}}$ **și** $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{0}}$ **și** $\hat{\mathbf{2}}$ $\hat{\mathbf{2}}$ **și** $\hat{\mathbf{0}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ **și** $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ **și** $\hat{\mathbf{2}}$

**13.** Rezolvați în $\mathbf{Z}_5$ sistemul $\begin{cases} x + \hat{3}y = \hat{0} \\ x + y = \hat{3} \end{cases}$. Soluția lui este:

$\hat{\mathbf{2}}$ **și** $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{0}}$ **și** $\hat{\mathbf{2}}$ $\hat{\mathbf{2}}$ **și** $\hat{\mathbf{0}}$ $\hat{\mathbf{3}}$ **și** $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ **și** $\hat{\mathbf{3}}$

**14.** Rezolvați în $\mathbf{Z}_7$ sistemul $\begin{cases} x + y = \hat{4} \\ \hat{3}x + y = \hat{6} \end{cases}$. Soluția lui este:

$\hat{\mathbf{0}}$ **și** $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{0}}$ **și** $\hat{\mathbf{2}}$ $\hat{\mathbf{2}}$ **și** $\hat{\mathbf{0}}$ $\hat{\mathbf{3}}$ **și** $\hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{1}}$ **și** $\hat{\mathbf{3}}$

**15.** Rezolvați în $\mathbf{Z}_3$ sistemul $\begin{cases} x + y + z = \hat{0} \\ x + y + \hat{2}z = \hat{1} \\ \hat{2}x + y + z = \hat{1} \end{cases}$. Soluția lui este:

$\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{2}}; \hat{\mathbf{3}}$ $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}; \hat{\mathbf{0}}$ $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}; \hat{\mathbf{3}}$ $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{1}}; \hat{\mathbf{1}}$ $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}; \hat{\mathbf{0}}$

# CUPRINS


| | | Enunţuri | Rezolvări |
|---|---|---|---|
| **1.** | **Elemente de algebră** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 5 | 150 |
| | **1.1** Grupuri . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 5 | 150 |
| | **1.1.1** Lege de compoziție internă (operație algebrică), tabla operației, parte stabilă . . . . . | 5 | 150 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . . . . . | 5 | |
| | b) Probleme rezolvate . . . . . . . . . . . . . . . | 8 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare . . . . | 15 | |
| | **1.1.2** Grup, exemple de grupuri, grupuri de matrice, grupuri de permutări, $\mathbf{Z}_n$ . . . . . . . . . . . | 18 | 153 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . . . . . | 18 | |
| | b) Probleme rezolvate . . . . . . . . . . . . . . . | 18 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare . . . . | 25 | |
| | **1.1.3** Morfism și izomorfism de grupuri . . | 27 | 155 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . . . . . | 27 | |
| | b) Probleme rezolvate . . . . . . . . . . . . . . . | 27 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare . . . . | 33 | |
| | **1.2** Inele și corpuri . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 35 | 156 |
| | **1.2.1** Inele . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 35 | 156 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . . . . . | 35 | |
| | b) Probleme rezolvate . . . . . . . . . . . . . . . | 36 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare . . . . | 43 | |
| | **1.2.2** Corpuri . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 45 | 159 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . . . . . | 45 | |
| | b) Probleme rezolvate . . . . . . . . . . . . . . . | 45 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare . . . . | 50 | |
| | **1.3** Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ( $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}_p$, $p$ prim ) . . . . . . . | 52 | 162 |
| | **1.3.1** Forma algebrică a unui polinom, operații ( adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar ). Teorema împărțirii cu rest; împărțirea polinoamelor, împărțirea cu $X - a$, schema lui Horner. Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bezout, c.m.m.d.c și c.m.m.m.c a două olinoame . . . . . . | 52 | 162 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . . . . . | 52 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | b) Probleme rezolvate | 56 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare | 62 | |
| | **1.3.2** Rădăcini ale polinoamelor. Relațiile lui Viete pentru polinoame de grad cel mult 4 | 65 | 165 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple | 65 | |
| | b) Probleme rezolvate | 67 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare | 77 | |
| | **1.3.3** Rezolvarea ecuațiilor algebrice | 80 | 171 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple | 80 | |
| | b) Probleme rezolvate | 81 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare | 83 | |
| | **1.4** Teste grilă de autoevaluare | 85 | 172 |
| | Testul 1 | 85 | 172 |
| | Testul 2 | 86 | 173 |
| | Testul 3 | 87 | 174 |
| | Testul 4 | 88 | 175 |
| | Testul 5 | 89 | 176 |
| | Testul 6 | 90 | 177 |
| **2.** | **Elemente de analiză matematică** | 91 | 177 |
| | **2.1** Primitive | 91 | 177 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple | 91 | |
| | b) Probleme rezolvate | 91 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare | 94 | |
| | **2.2** Integrala nedefinită | 96 | 178 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple | 96 | |
| | b) Probleme rezolvate | 98 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare | 101 | |
| | **2.3** Metoda de integrare prin părți | 104 | 180 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple | 104 | |
| | b) Probleme rezolvate | 104 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare | 107 | |
| | **2.4** Metoda de integrare prin schimbare de variabilă | 109 | 181 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple | 109 | |
| | b) Probleme rezolvate | 110 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare | 114 | |
| | **2.5** Integrarea funcțiilor raționale | 117 | 182 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple | 117 | |
| | b) Probleme rezolvate | 120 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare | 123 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **2.6** Teste grilă de autoevaluare . . . . . . . . . . . . . | 125 | 184 |
| | Testul 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 125 | 184 |
| | Testul 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 126 | 185 |
| **3.** | **Integrala definită** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 127 | 185 |
| | **3.1** Formula lui Leibniz-Newton. Proprietăți ale integralei definite . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 127 | 185 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . . . . . | 127 | |
| | b) Probleme rezolvate . . . . . . . . . . . . . . . | 128 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare . . . | 131 | |
| | **3.2** Metode de calcul pentru integrala definită . . | 133 | 187 |
| | **3.2.1** Metoda de integrare prin părți **. . . . . . .** | 133 | 187 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . . . . . | 133 | |
| | b) Probleme rezolvate . . . . . . . . . . . . . . . | 133 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare . . . . | 134 | |
| | **3.2.2** Metoda de integrare prin schimbarea de variabilă . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 136 | 189 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . . . . . | 136 | |
| | b) Probleme rezolvate . . . . . . . . . . . . . . . | 136 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare . . . . | 137 | |
| | **3.3** Integrarea funcțiilor raționale . . . . . . . . . . | 139 | 191 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . . . . . | 139 | |
| | b) Probleme rezolvate . . . . . . . . . . . . . . . | 139 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare . . . | 141 | |
| | **3.4** Teste grilă de autoevaluare . . . . . . . . . . . . . | 143 | 193 |
| | Testul 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 143 | 193 |
| | Testul 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 144 | 194 |
| | Testul 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 145 | 195 |
| **4.** | Aplicații ale integralei definite . . . . . . . . . . . . . | 146 | 196 |
| | a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . . . . . | 146 | |
| | b) Probleme rezolvate . . . . . . . . . . . . . . . | 146 | |
| | c) Probleme propuse spre rezolvare . . . | 148 | |