1.2.3 Morfisme de inele si corpuri

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Morfisme de inele

Definiție. Fiind date inelele $(\mathbf{A},+,\cdot)$ și $(\mathbf{A}',*,\mathrm{o})$, se numește **morfism** de inele funcția $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$, care îndeplinește proprietățile:

1) $f(x+y) = f(x) * f(y)$ $(\forall)x, y \in \mathbf{A}$;

2) $f(x \cdot y) = f(x) \mathrm{o} f(y)$ $(\forall)x, y \in \mathbf{A}$;

3) $f(e.) = e_{\mathrm{o}}$, unde $e.$ și e_{o} sunt elementele neutre în raport cu operațiile multiplicative din cele două inele.

Definiție. Fiind date inelele $(\mathbf{A},+,\cdot)$ și $(\mathbf{A}',*,\mathrm{o})$, se numește **izomorfism** de inele funcția $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$, care îndeplinește proprietățile:

a) f este morfism de inele.

b) f este bijectivă.

Observație. Un morfism de inele $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ se numește **endomorfism** al inelului **A**, iar un izomorfism de inele $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ se numește **automorfism** al inelului **A**.

2. Morfisme și izomorfisme de corpuri

Definiție. Fiind date corpurile $(\mathbf{K},+,\cdot)$ și $(\mathbf{K}',*,\mathrm{o})$, se numește **morfism** de corpuri funcția $f : \mathbf{K} \to \mathbf{K}'$, care îndeplinește proprietățile:

1) $f(x+y) = f(x) * f(y)$ $(\forall)x, y \in \mathbf{K}$;

2) $f(x \cdot y) = f(x) \mathrm{o} f(y)$ $(\forall)x, y \in \mathbf{K}$;

3) $f(e.) = e_{\mathrm{o}}$, unde $e.$ și e_{o} sunt elementele neutre în raport cu operațiile multiplicative din cele două corpuri.

Definiție. Fiind date corpurile $(\mathbf{K},+,\cdot)$ și $(\mathbf{K}',*,\mathrm{o})$, se numește **izomorfism** de corpuri funcția $f : \mathbf{K} \to \mathbf{K}'$, care îndeplinește proprietățile:

a) f este morfism de inele.

b) f este bijectivă.

b) Probleme rezolvate

1. a) Arată că pe mulțimea $\mathbf{A} = \{x + y\sqrt{7} \mid x, y \in \boldsymbol{Z}\}$ adunarea și înmulțirea determină o structură de inel.

b) Arată că pe mulțimea $\mathbf{M} = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 7y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \boldsymbol{Z}\right\}$ adunarea și înmulțirea determină o structură de inel.

c) Arată că inelele de la a) și b) sunt izomorfe.

Soluție. a) Cu ușurință se arată că $(\mathbf{A}, +)$ este grup abelian cu elementul neutru 0.

Cu ușurință se arată că $(\mathbf{A}, \cdot)$ este monoid cu elementul neutru 1.

Cu ușurință se arată că înmulțirea este distributivă față de adunare.

b) Se verifică cu ușurință că $(\mathbf{M}, +)$ este grup abelian cu elementul neutru matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cu ușurință se arată că $(\mathbf{A}, \cdot)$ este monoid cu elementul neutru 1.

Cu ușurință se arată că înmulțirea este distributivă față de adunare.

c) Se stabilește izomorfismul:

$$f: \mathbf{A} \to \mathbf{M}, f\left(x + y\sqrt{7}\right) = \begin{pmatrix} x & y \\ 7y & x \end{pmatrix}.$$

Vom demonstra acum că:

a) $f\left(x_1 + y_1\sqrt{7} + x_2 + y_2\sqrt{7}\right) = f\left(x_1 + y_1\sqrt{7}\right) + f\left(x_2 + y_2\sqrt{7}\right)$ $(\forall) x_1 + y_1\sqrt{7}, x_2 + y_2\sqrt{7} \in \mathbf{A}.$

Avem: $f\left(x_1 + y_1\sqrt{7} + x_2 + y_2\sqrt{7}\right) = f\left(x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)\sqrt{7}\right) =$

$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ 7(y_1 + y_2) & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 7y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 7y_2 & x_2 \end{pmatrix} =$

$= f\left(x_1 + y_1\sqrt{7}\right) + f\left(x_2 + y_2\sqrt{7}\right)$ $(\forall) x_1 + y_1\sqrt{7}, x_2 + y_2\sqrt{7} \in \mathbf{A}.$

b) $f\left(\left(x_1 + y_1\sqrt{7}\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{7}\right)\right) = f\left(x_1 + y_1\sqrt{7}\right) f\left(x_2 + y_2\sqrt{7}\right)$ $(\forall) x_1 + y_1\sqrt{7}, x_2 + y_2\sqrt{7} \in \mathbf{A}.$

Avem: $f\left(\left(x_1 + y_1\sqrt{7}\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{7}\right)\right) =$

$= f\left((x_1x_2 + 7y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{7}\right) =$

$= \begin{pmatrix} x_1x_2 + 7y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ 7(x_1y_2 + x_2y_1) & x_1x_2 + 7y_1y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 7y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 7y_2 & x_2 \end{pmatrix} =$

$= f\left(x_1 + y_1\sqrt{7}\right) f\left(x_2 + y_2\sqrt{7}\right)$ $(\forall) x_1 + y_1\sqrt{7}, x_2 + y_2\sqrt{7} \in \mathbf{A}.$

c) $f(0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Avem: $f(0)=f\left(0+0\cdot\sqrt{7}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

d) f este bijectivă.

Avem: f este injectivă deoarece $f\left(x_1+y_1\sqrt{7}\right)=f\left(x_2+y_2\sqrt{7}\right)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ 7y_1 & x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2 & y_2\\ 7y_2 & x_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_1=x_2$ și $y_1=y_2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1+y_1\sqrt{7}=x_2+y_2\sqrt{7}$.

f este surjectivă, deoarece pentru orice $\begin{pmatrix}x & y\\ 7y & x\end{pmatrix}\in\mathbf{M}$, există
$X+Y\sqrt{7}$ astfel încât $f\left(X+Y\sqrt{7}\right)=\begin{pmatrix}x & y\\ 7y & x\end{pmatrix}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}X & Y\\ 7Y & X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ 7y & x\end{pmatrix}\Leftrightarrow X=x$ și $Y=y$.

2. a) Arată că pe $\mathbf{A}=(0,+\infty)$ legile de compoziţie: $x*y=xy$ şi $x\circ y=x^{\ln y}$ determină o structură de corp comutativ.

b) Arată că între corpul numerelor reale **R** şi corpul de la punctul a) există un izomorfism de forma

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{A}, f(x)=e^{ax}, a\in\mathbf{R}.$$

Soluție. a) Cu ușurință se arată că $(A,*)$ este grup abelian cu elementul neutru 1.

Cu ușurință se arată că $(\mathbf{A},\mathrm{o})$ este monoid cu elementul neutru e.

Cu ușurință se arată că orice $x\in\mathbf{A}$ este inversabil cu inversul egal cu $e^{\frac{1}{\ln x}}$.

Cu ușurință se arată că legea o este distributivă față de legea $*$ și atunci rezultă că $(A,*,\mathrm{o})$ este corp comutativ.

b) Știm că $(\mathbf{R},+,\ \cdot)$ este corp cu elementul neutru față de adunare 0 și elementul neutru față de înmulțire 1.

Trebuie ca : $f(1)=e\Rightarrow e^a=e\Rightarrow a=1\Rightarrow f(x)=e^x$.

Evident f este bijectivă.

$f(x+y)=e^{x+y}=e^xe^y=f(x)*f(y)\ (\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

$f(xy)=e^{xy}$ și $f(x)\mathrm{o}f(y)=e^x\mathrm{o}e^y=(e^x)^{\ln e^y}=(e^x)^y=e^{xy}\Rightarrow$
$\Rightarrow f(xy)=f(x)\mathrm{o}f(y)\ (\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

Deci $f(x)=e^x$ este izomorfism de corpuri.

3. Arătați că pe $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ legile de compoziţie:

$$(a,b) + (a',b') = (a + a', b + b')$$

$$(a,b) \cdot (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

determină o structură de inel;

b) Arătați că pe $\mathbf{Q}[\mathbf{i}] = \{x + iy | x, y \in \mathbf{Q}\}$ adunarea şi înmulţirea numerelor complexe determină o structură de inel.

c) Arătați că inelele de la punctele a) şi b) sunt izomorfe.

Soluție. a) Cu ușurință se arată că $(A,+)$ este grup abelian cu elementul neutru $(0,0)$ și simetricul lui (a,b) egal cu $(-a,-b)$.
Cu ușurință se arată că $(\mathbf{A},\cdot)$ este monoid cu elementul neutru $(1,0)$.
Vom arăta că înmulțirea este distributivă față de adunare, sau:

$[(a,b) + (a',b')] \cdot (c,c') = (a,b) \cdot (c,c') + (a',b') \cdot (c,c') \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a + a', b + b') \cdot (c,c') = (ac - bc', ac' + bc) +$
$+(a'c - b'c', a'c' + b'c) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (c(a + a') - c'(b + b'), c'(a + a') + c(b + b') =$
$= (ac - bc' + a'c - b'c', ac' + bc + a'c' + b'c)$, ceea ce este evident adevărat.

b) Folosind proprietățile numerelor complexe se arată că pe $\mathbf{Q}[\mathbf{i}] = \{x + iy | x, y \in \mathbf{Q}\}$ adunarea şi înmulţirea numerelor complexe determină o structură de inel

c) Definim $f\colon \mathbf{A} = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}[\mathbf{i}], f(x,y) = x + iy$ și arătăm că este izomorfism de inele.

$f[(x,y) + (x',y')] = f(x + x', y + y') = x + x' + i(y + y') =$
$= x + iy + x' + iy' = f(x,y) + f(x',y')$.
$f[(x,y) \cdot (x',y')] = f(xx' - yy', xy' + x'y) = xx' - yy' +$
$+i(xy' + x'y) = x(x' + iy') + y(ix' - y') = x(x' + iy') +$
$+y(ix' + i^2y') = x(x' + iy') + iy(x' + iy') = (x' + iy') \cdot$
$\cdot (x + iy) = f(x,y) \cdot f(x',y')$ $(\forall) x, y, x', y' \in \mathbf{Q}$.

Evident f este bijectivă și atunci f definește un izomorfism de inele.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. a) Arătați că pe **Z** legile de compoziţie:

$$x * y = x + y - 2;\ x \circ y = xy - 2x - 2y + 6;$$

determină o structură de inel comutativ;

b) Arătați că funcţia $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = x + a, a \in \mathbf{R}$ realizează izomorfismul între inelul (**Z**, +, ·) şi inelul de la punctul a) pentru valoarea lui a egală cu:

0 1 2 3 4

2. a) **A**rătați că pe **Z** legile de compoziţie:

$$x * y = x + y + 1;\ x \circ y = xy + x + y;$$

determină o structură de inel comutativ;

b) Arătați că pe **Z** legile de compoziţie:

$$x \oplus y = x + y - 1;\ x \otimes y = xy - x - y + 2;$$

determină o structură de inel comutativ;

c) Arătați că între inelele de la a) şi b) există un izomorfism de forma $f(x) = ax + 2, a \in \mathbf{R}$ pentru valoarea lui a egală cu:

0 1 2 3 4

3. a) Arătați că pe **R** legile de compoziţie:

$$x * y = x + y - 4;\ \ x \circ y = xy - 4x - 4y + 20;$$

determină o structură de corp comutativ;

b) Arătați că $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + a, a \in \mathbf{R}$ stabileşte un izomorfism între corpul numerelor reale şi corpul de la a) pentru valoarea lui a egală cu:

0 1 2 3 4

4. a) Arătați că pe **R** legile de compoziţie:

$$x * y = x + y + 4;\ \ x \circ y = xy + 4x + 4y + 12;$$

determină o structură de corp comutativ;

b) Arătați că $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax - 4, a \in \mathbf{R}$ stabileşte un izomorfism între corpul numerelor reale şi corpul de la a) pentru valoarea lui a egală cu:

0 1 2 3 4

CUPRINS