1.4.3 Studiul compatibilității și rezolvarea sistemelor. Proprietatea Kronecker-Capelli. Proprietatea Rouche.

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Rangul unei matrice

Definiție. Fiind dată matricea $A \in M_{m,n}(\mathbf{C}), m, n \in \mathbf{N}^*$ și $r \in \mathbf{N}^*, r \leq \min(m,n)$, numim **minor de ordinul** r,determinantul de ordin r care se formează cu elementele matricii A situate la intersecția a r linii și r coloane.

Definiție. Matricea $A \in M_{m,n}(\mathbf{C}), m, n \in \mathbf{N}^*$ are rangul r dacă are un minor de ordin r diferit de 0 și toți minorii de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt egali cu 0.

Proprietate. Fie matricea $A \in M_{m,n}(\mathbf{C}), m, n \in \mathbf{N}^*, A \neq 0_{m,n}$ și $r \in \mathbf{N}^*$. Rangul matricei A este egal cu r dacă și numai dacă există un minor de ordinul r al matricei A, diferit de 0, iar toți minorii de ordinul $r+1$, dacă există să fie egali cu 0.

Proprietate. Fie $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{C}), m, n \in \mathbf{N}^*$. Atunci:

$$\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang}(A) \cdot \operatorname{rang}(B).$$

Exemplu. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Notăm $r = \operatorname{rang}(A)$. Evident $r \leq \min\{3,4\} = 3$.

Considerăm minorul $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Calculăm acum:

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deoarece coloanele 1 și 3 sunt egale.

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$, deoarece coloanele 2 și 3 sunt egale.

Conform proprietății de mai sus rangul matricei A este 2.

2. Sisteme de ecuații liniare

Definiție. Se consideră sistemul de ecuații liniare $AX = B$, și $\operatorname{rang}(A) = r$. Orice minor de ordinul r al matricei A, diferit de 0 se numește **minor principal**.

Necunoscutele sistemului care corespund minorului principal se numesc **necunoscute principale**, celelalte se numesc **necunoscute**

secundare.

Ecuațiile sistemului care corespund minorului principal se numesc **ecuații principale**, celelalte se numesc **ecuații secundare**.

Exemplu. Se consideră sistemul: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 4x+y+z=1 \\ x+2y+2=10 \end{cases}$.

Fie minorul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1-4=-3 \neq 0$ și

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, deoarece coloanele 2 și 3 sunt identice. Atunci rangul sistemului este egal cu 2.

Minorul principal este deci $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Necunoscutele principale sunt: x și y, necunoscută secundară z.

Ecuații principale sunt primele două, ecuație secundară este ecuația a treia.

Definiție. Un sistem de ecuații liniare $AX=B$, este **incompatibil** dacă nu are nici o soluție.

Definiție. Un sistem de ecuații liniare $AX=B$, este **compatibil** dacă are cel puțin o soluție. Dacă sistemul are o soluție se numește **compatibil determinat**, iar dacă are mai multe soluții se numește **compatibil nedeterminat**.

Definiție. Fiind dat un sistem de ecuații liniare $AX=B$, matricea formată din elementele matricei A în ordinea normală și ca ultimă coloană, coloana termenilor liberi se numește matricea extinsă a matricei A și se notează cu $\bar{A}$.

Definiție. Numim **minor caracteristic** orice minor de ordin $r+1$ obținut prin bordarea unui minor principal cu elementele corespunzătoare ale coloanei termenilor liberi și cu cele ale uneia dintre liniile rămase.

Exemplu. Fiind dat sistemul: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=4 \\ x+y+2z=5 \end{cases}$, cosiderăm minorul principal de ordin 2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Atunci există un singur minor caracteristic de ordin $2+1=3$ și anume $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Teorema Kronecker-Capelli. Un sistem de ecuații liniare $AX=B$ este compatibil dacă și numai dacă $\text{rang}(A)=\text{rang}(\bar{A})$.

Exemplu. Considerăm sistemul: $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y+z=7 \\ 3x-y+2z=7 \end{cases}$.

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

$\det(A)=-1 \Rightarrow \text{rang}(A)=3 \Rightarrow \text{rang}(\bar{A})=3$ și atunci sistemul este compatibil.

Teorema lui Rouche. Un sistem de ecuații liniare $AX=B$ este compatibil dacă și numai dacă toți minorii caracteristici sunt egali cu 0.

Algoritm de rezolvare a unui sistem de *m* ecuații liniare cu *n* necunoscute

a) Se calculează rangul sistemului r.

b) Dacă $r=m$, atunci sistemul este compatibil
- Dacă $r=n$, atunci sistemul este compatibil determinat
- Dacă $r<n$, atunci sistemul este compatibil nedeterminat

c) Dacă $r<m$, avem:
- Dacă toți minorii caracteristici sunt nuli atunci sistemul este compatibil
  - Dacă $r=n$, atunci sistemul este compatibil determinat
  - Dacă $r<n$, atunci sistemul este compatibil nedeterminat
- Dacă cel puțin unul dintre minorii caracteristici este diferit de 0, atunci sistemul este incompatibil.

Sisteme omogene de *m* ecuații liniare cu *n* necunoscute

1. Orice sistem liniar de *m* ecuații cu *n* necunoscute este compatibil, având ca soluție soluția banală sau soluția 0

2. Un sistem liniar de *m* ecuații cu *n* necunoscute are și alte soluții în afară de soluția banală sau soluția 0 dacă $r<m$.

b) Probleme rezolvate

1. Arătați că sistemul $\begin{cases} x+y=2 \\ x+2y=3 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ este compatibil determinat:

a) folosind teorema lui Kronecker-Capelli.
b) folosind teorema lui Rouche.

Soluție. a) Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului și matricea extinsă $\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Considerăm determinantul principal $\Delta_{\text{princ}.}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$ și atunci $r(A)=2$.

$\det(\bar{A})=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=0$, de unde rezultă că $r(\bar{A})=2$. Atunci $r(A)=r(\bar{A})=2$ și conform teoremei lui Kronecker-Capelli sistemul este compatibil.

b) Avem $\Delta_{\text{princ}.}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$. Există un singur determinant caracteristic: $\Delta_{\text{car},3}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=$
$=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=0$ și conform teoremei lui Rouche sistemul este compatibil.

2. Determinați valoarea parametrului $a\in\mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} ax+y=4 \\ x+y=3 \end{cases}$ să fie compatibil.

Soluție. Avem: $m=n=2$. $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=a-1$.

Sistemul este compatibil dacă $m=r\Rightarrow r=2\Rightarrow a-1\neq 0\Rightarrow$
$\Rightarrow a\neq 1$.

3. Determinați valoarea parametrului $a\in\mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} ax-y=2 \\ x+y=3 \end{cases}$ să fie incompatibil.

Soluție. Avem: $m = n = 2$. $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$
$= a + 1$.

Sistemul este incompatibil dacă $r < m \Rightarrow r < 2 \Rightarrow a + 1 =$
$= 0 \Rightarrow a = -1$.

4. Studiați compatibilitatea sistemului $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$, $a \in$ **R.**

Soluție. Fie $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului.

Calculăm $\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 1 & 0 \end{vmatrix} =$
$= \begin{vmatrix} 1-a & 0 \\ 1-a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$.

Dacă $\det(A) = 1 - a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$, atunci $r = 3$ și avem: $r = m = n = 3$ și deci sistemul este compatibil determinat și se rezolvă prin regula lui Cramer.
Dacă $\det(A) = 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$, atunci $r < 3$. Alegem
$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ca determinant principal și atunci $r = 2$.
Avem $r < m = 3$ și calculăm minorul caracteristic(există numai unul) și anume: $\Delta_{\text{car},1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq$
$\neq 0$ și atunci sistemul este incompatibil.

5. Studiați compatibilitatea sistemului $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ ax + y = 7 \\ x + (a+1)y = 12 \end{cases}$,
$a \in$ **R.**

Soluție. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului. Avem: $m = 3, n = 2$. Alegem determinantul principal $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2a$

a) Dacă $1-2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{2}$ avem: $r=2$ și atunci $r<m$ și calculăm $\Delta_{\text{car},3}= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ a & 1 & 7 \\ 1 & a+1 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1-2a & 7-5a \\ 1 & a-1 & 7 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1-2a & 7-5a \\ a-1 & 7 \end{vmatrix} = 7(1-2a)-(a-1)(7-5a) = \cdots =$
$= 5a^2 - 26a + 14.$

$\Delta_{\text{car},3}= 0 \Rightarrow 5a^2-26a+14=0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{13\pm\sqrt{99}}{5}.$

- Dacă $a = \frac{13\pm\sqrt{99}}{5}$ sistemul este compatibil.
- Dacă $a \neq \frac{13\pm\sqrt{99}}{5}$ atunci $\Delta_{\text{car},3} \neq 0$ și sistemul este incompatibil.

b) Dacă $1-2a=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$ sistemul devine:

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ \frac{1}{2}x+y=7 \\ x+\frac{3}{2}y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ x+2y=14 \\ 2x+3y=24 \end{cases}.$$

Alegem determinantul principal $\Delta_p= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-4=-1 \neq 0$ și atunci $r=2$. Avem: $r<m$ și calculăm determinantul caracteristic $\Delta_{car,1}= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 14 \\ 2 & 3 & 24 \end{vmatrix} = \cdots = 9 \neq 0$ și atunci sistemul este incompatibil.

6. Studiați compatibilitatea sistemului $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}, a \in$ **R.**

Soluție. Fie $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului. Avem: $m=3, n=3$. Atunci calculăm determinantul: $\Delta= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots =$

$= (a-1)^2$.

a) Dacă $(a-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow r = m = n$ și sistemul este compatibil deteminat și se rezolvă cu regula lui Cramer.

b) Dacă $(a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$, atunci matricea sistemului devine: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Toți minorii de ordin 2 ai matricei A sunt egali cu $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Atunci singurul minor principal este $|1| = 1 \neq 0$ și rangul matricei A este $r = 1$. Calculăm minorii caracteristici 2 și 3.

$\Delta_{car,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $\Delta_{car,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$.

Deoarece un determinant caracteristic este diferit de 0, rezultă că sistemul este incompatibil.

7. Studiați compatibilitatea sistemului $\begin{cases} x + (a-1)y + z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$.

Soluție. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots =$
$= 2a^2 - 4a$.

a) Dacă $2a^2 - 4a \neq 0 \Rightarrow r = 3 = m = n$ și sistemul are numai soluția banală, adică: $x = 0, y = 0, z = 0$.

b) Dacă $2a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a = 0$ sau $a = 2$.

- Dacă $a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se alege determinantul principal $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3$. Avem $r = 2 < m = 3$.
$\Delta_{car,3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ și atunci sistemul este compatibil nedeterminat. Se notează $z = k$ și se determină din primele 2 ecuații x și y în funcție de k.
- Dacă $a = 2$ se procedează analog.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Valoarea lui $a \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ să fie compatibil nedeterminat este:

1 **2** **3** **4** **5**

2. Valoarea lui $a \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} x - y = 2 \\ ax - 3y = 6 \end{cases}$ să fie compatibil nedeterminat este:

1 **2** **3** **4** **5**

3. Fie valoarea lui $a \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} x + y = 3 \\ ax + 2y = 5 \end{cases}$ să fie compatibil determinat. Condiția pe care trebuie să o verifice a este:

$\boldsymbol{a \neq -1}$ $\boldsymbol{a \neq -2}$ $\boldsymbol{a \neq 0}$ $\boldsymbol{a \neq 1}$ $\boldsymbol{a \neq 2}$

4. Valoarea lui $a \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} x + y = 3 \\ ax + 2y = 5 \end{cases}$ să fie incompatibil este:

1 **2** **3** **4** **5**

5. Fie valoarea lui $a \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ ax + y + 4z = 12 \end{cases}$ să fie compatibil nedeterminat. Condiția pe care trebuie să o verifice a este:

$\boldsymbol{a \neq -1}$ $\boldsymbol{a} > -2$ $\boldsymbol{a} < 0$ $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}$ $\boldsymbol{a} < 2$

6. Valoarea lui $a \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 5 \\ 2x + ay = 11 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$ să fie compatibil este:

1 **2** **3** **4** **5**

7. Studiați compatibilitatea sistemului: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + az = 8 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$.

Valoarea lui a astfel încât sistemul să fie incompatibil este:

1 2 3 4 5

8. Studiați compatibilitatea sistemului: $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$.

Valoarea lui a astfel încât sistemul să fie incompatibil este:

1 2 3 4 5

9. Studiați compatibilitatea sistemului: $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 2x + ay + z = 4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$.

Valoarea lui a astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat este:

1 2 3 4 5

10. Studiați compatibilitatea sistemului: $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ ax + 4y - 2z = 11 \\ ax - 2y + 4z = 11 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$.

Valoarea lui a astfel încât sistemul să fie incompatibil este:

1 2 3 4 5

11. Valoarea lui $a \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul:

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}, a \in \mathbf{R}$$

să aibă și alte soluții în afară de soluția banală (0) este:

1 2 3 4 5

12. Fie $a \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul: $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$

să aibă numai soluția banală (0). Condiția pe care trebuie să o verifice a este:

$\boldsymbol{a \neq -1}$ $\boldsymbol{a \neq -2}$ $\boldsymbol{a \neq 0}$ $\boldsymbol{a \neq 1}$ $\boldsymbol{a \neq 2}$

Cuprins

		Enunţuri	Rezolvări
1.	Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare	5	197
	1.1 Permutări	5	197
	1.2 Matrice	10	197
	1.3 Determinanți	27	201
	1.3.1 Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3, proprietăți	27	201
	1.3.2 Aplicațiile determinanților în geometria plană: ecuația unei drepte determinată de două puncte distincte, aria unui triunghi și coliniaritatea a trei puncte în plan	39	206
	1.4 Sisteme de ecuații liniare	43	207
	1.4.1 Matrice inversabile $M_n(C), n = 2,3$. Ecuații matriceale	43	207
	1.4.2 Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute. Forma matriceală a unui sistem. Metode de rezolvare a sistemelor liniare: metoda lui Cramer metoda lui Gauss	48	208
	1.4.3 Studiul compatibilității și rezolvare sistemelor. Proprietatea Kronecker-Capelli. Proprietatea Rouche.	55	211
	1.5 Teste grilă de autoevaluare	64	214
	Testul 1	64	214
	Testul 2	65	215
	Testul 3	66	216
	Testul 4	67	216
	Testul 5	68	217
	Testul 6	69	218
	Testul 7	70	219
2.	Limite de funcții	71	220
	2.1 Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăți, dreapta încheiată, simbolurile $+\infty$ și $-\infty$	71	220
	2.2 Șiruri de numere	78	220
	2.3 Limita unei funcții într-un punct, limite		

	laterale. Operații cu limite de funcții	102	225
	2.4 Limitele funcțiilor elementare	108	226
	2.5 Asimptotele funcțiilor reale	123	230
	2.6 Teste grilă de autoevaluare	128	231
	Testul 1	128	231
	Testul 2	129	232
	Testul 3	130	233
	Testul 4	131	234
	Testul 5	132	236
	Testul 6	133	236
	Testul 7	134	237
3.	Funcții continue	135	238
	3.1 Continuitatea unei funcții. Operații cu funcții continue	135	238
	3.2 Proprietăți ale funcțiilor continue	144	241
	3.3 Teste grilă de autoevaluare	148	243
	Testul 1	148	243
	Testul 2	149	243
4.	Funcții derivabile	150	244
	4.1 Tangenta la o curbă. Derivata unei funcții într-un punct , funcții derivabile	150	244
	4.2 Derivatele unor funcții uzuale. Operații cu funcții care admit derivată. Derivarea funcțiilor compuse	158	247
	4.3 Regulile lui l'Hospital	168	248
	4.4 Teste grilă de autoevaluare	173	250
	Testul 1	173	250
	Testul 2	174	252
	Testul 3	175	253
5.	Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor	176	253
	5.1 Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor	176	253
	5.2 Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor	181	256
	5.3 Reprezentarea grafică a funcțiilor	184	257
	5.4 Reprezentarea grafică a conicelor	192	258
	5.5 Teste grilă de autoevaluare	196	258
	Testul 1	196	258